

Der Massendefekt der Atomkerne und das relativistische Mehrkörperproblem

Von ERICH BAGGE

Aus dem Kaiser-Wilhelm-Institut für Physik, Hechingen

(Z. Naturforschg. 1, 361—366 [1946]; eingegangen am 25. März 1946)

Es wird eine Lagrange-Funktion für ein relativistisches Mehrteilchensystem angegeben, die alle Glieder bis zur Ordnung $(v/c)^2$ vollständig enthält. Sie beschreibt den Trägheitsverlust gebundener Systeme, also den durch die Bindung bewirkten Massendefekt, in der von der Erfahrung geforderten Form. Die aus der Lagrange-Funktion folgende Wellengleichung des Zweiteilchensystems wird hergeleitet.

§ 1. Einleitung

Eine den Forderungen der speziellen Relativitätstheorie genügende Mechanik der Mehrteilchensysteme ist bis heute noch nicht bekannt. Dies hat seinen Grund darin, daß bei hohen Teilchengeschwindigkeiten typische Feldwirkungen, z. B. Retardierungseffekte und Strahlungsrückwirkungen, die Bahnbewegungen beeinflussen, die wir in ihrer Gesamtheit noch nicht beherrschen, weil die dazu nötige strenge Formulierung einer einheitlichen Feldtheorie der Materie bisher nicht vorliegt.

Trotzdem muß es möglich sein — wenigstens in der Näherung bis zu den Gliedern mit dem Faktor $(v/c)^2$ —, lorentzinvariante Teilchenmechanik zu treiben, denn die Strahlungsrückwirkungen sind, wie wir von der Elektrodynamik her wissen, klein von der Ordnung $(v/c)^3$. Sie können in der oben angestrebten Näherung also vernachlässigt werden. Bis zu den Gliedern mit $(v/c)^2$ lassen sich aber die mechanischen Gleichungen auch dann schon angeben, wenn nur die relativistischen Feldgleichungen für die Kräfte bekannt sind, die *zwischen* den Teilchen des betreffenden Systems wirken.

Es gibt aber Fälle, in denen wir selbst diese Feldgleichungen nicht besitzen, z. B. bei den Kräften im Atomkern, und in denen die relativistischen Effekte eine große Rolle spielen, wie man aus der Existenz des Massendefekts schließen kann. Hier entsteht die Frage, ob man die relativistischen Ergänzungen zu den gewöhnlichen Bewegungsgleichungen nicht aus irgendwelchen allgemeinen Prinzipien entnehmen kann.

Jedenfalls müssen die korrigierten Bewegungs-

gleichungen ja die Eigenschaft haben, daß die Trägheit eines Systems aus mehreren Teilchen nicht durch die Summe der Massen der einzelnen Partikeln, sondern durch diese, vermindert um den durch die Bindungsenergie gegebenen Massendefekt, bestimmt ist.

Um nun zu einer näherungsweise lorentzinvarianten Partikelmechanik zu gelangen, wollen wir gerade diese Tatsache als heuristischen Gesichtspunkt verwenden, d. h. wir wollen die unrelativistische Lagrange-Funktion eines beliebigen Mehrteilchensystems um Glieder der Größenordnung $(v/c)^2$ erweitern, die so eingerichtet sind, daß sie für die Bewegungen des Gesamtsystems in einem äußeren Felde von selbst zum richtigen Massendefekt führen. Es ist jedoch schon hier zu bemerken, daß diese Forderung eine zwar notwendige, nicht aber eine hinreichende Bedingung zur eindeutigen Festlegung der Form dieser Glieder darstellt. Wir müssen deshalb noch einen zweiten Gesichtspunkt dieser Art mit heranziehen und als solcher bietet sich die weitere Forderung, daß sich im Falle bewegter Ladungen, also Coulombscher Ortsabhängigkeit der Potentiale zwischen den Teilchen, gerade die Bewegungsgesetze der Elektromechanik ergeben sollen.

Bekanntlich wurde ja von Darwin¹ im Hinblick auf Fragen der Feinstruktur der Wasserstofflinien bereits angegeben, wie die Lagrange-Funktion in der hier angestrebten Näherung für das System Elektron—Proton abzuändern sei, damit sie auch

¹ C. G. Darwin, Philos. Mag. J. Sci. **39**, 537 [1920]; s. auch G. Breit, Physic. Rev. **34**, 553 [1929]; **36**, 383 [1930].



den Wirkungen der von den bewegten Ladungen erzeugten Magnetfelder und der dabei auftretenden Retardierungseffekte Rechnung trägt.

Ziel dieser Arbeit ist es nun, eine Lagrange-Funktion aufzusuchen, die für *ganz beliebige Ortsabhängigkeit* der Potentiale zwischen den Teilchen noch zum richtigen Massendefekt des Gesamtsystems führt und die im Spezialfall des Coulomb-Feldes genau in die Darwinsche Form übergeht².

Es ist dabei im Rahmen dieser Arbeit nicht zweckmäßig, zu zeigen, auf welchem mehr oder weniger systematischen Wege man die Gestalt der gesuchten Zusatzglieder schließlich erraten kann, ohne eine allgemeine Feldtheorie als Ausgangspunkt zu wählen. Wir werden vielmehr so vorgehen, daß wir die Lagrange-Funktion, die allen oben besprochenen Bedingungen genügt, einfach angeben und dann beweisen, daß sie die gewünschten Eigenschaften besitzt.

§ 2. Die angenähert lorentzinvariante Lagrange-Funktion des Mehrteilchensystems

Bei den nun folgenden Betrachtungen werden die Quantenphänomene zunächst nicht berücksichtigt. Wir wollen also annehmen, daß die Orte \mathbf{r}_i und die Geschwindigkeiten $\mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{r}}_i$ der einzelnen Teilchen

$$L = \sum_{i=1}^n \left\{ \frac{m_i}{2} \left(\mathbf{v}_i^2 + \frac{\mathbf{v}_i^4}{4c^2} \right) - \sum_{k < i} \left[V(\mathbf{r}_{ik}) \left(1 - \frac{\mathbf{v}_i \mathbf{v}_k}{2c^2} \right) + \frac{(\mathbf{v}_i \mathbf{r}_{ik})(\mathbf{v}_k \text{grad}_k V) + (\mathbf{v}_k \mathbf{r}_{ki})(\mathbf{v}_i \text{grad}_i V)}{4c^2} \right] - U(\mathbf{r}_i) \right\}. \quad (1)$$

Dazu ist zunächst zu bemerken: Die ersten beiden Summanden im Klammerausdruck der rechten Seite von Gl. (1) stellen die klassische kinetische Energie und die dazugehörige relativistische Korrektur erster Ordnung dar, soweit sie von der Massenzunahme der Teilchen bei höherer Geschwindigkeit herrührt. Die Glieder im eckigen Klammer-

mit den Massen m_i in einem bestimmten Augenblicke im Bezugssystem des Beobachters bekannt seien.

Weiter sei der statisch gemessene Potentialverlauf zwischen den einzelnen Teilchen gegeben. Mit der Abkürzung $\mathbf{r}_{ik} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k$ möge er die Gestalt $V(\mathbf{r}_{ik})$ besitzen.

Im Hinblick darauf, daß am Schlusse ja Aussagen über den Massendefekt des Gesamtsystems herzuleiten sind, werde angenommen, daß auf alle Teilchen noch ein äußeres Feld $U(\mathbf{r}_i)$ wirke. Man denke etwa an den Fall der Bewegung eines Atomkerns im Schwerfeld der Erde. Es ist dann zu zeigen, daß sich dieser Kern im Kraftfeld der Erde anders benimmt, als ein Teilchen, dessen Masse so groß ist, wie diejenige aller in ihm vorhandenen Nukleonen zusammengekommen beträgt. Die spezielle Form des Feldes $U(\mathbf{r}_i)$ ist für das folgende ganz belanglos. Abgesehen davon, daß es existiert, wird weiter nichts benötigt. Dies hängt damit zusammen, daß uns lediglich die Differentialgleichungen für die Bewegungen unseres Systems interessieren, da diese das gewünschte Ergebnis bereits enthalten müssen.

Unter diesen Voraussetzungen behaupten wir folgendes: Die gesuchte Lagrange-Funktion unseres Systems von n Teilchen hat bei Vernachlässigung aller Glieder mit höheren Potenzen von (v/c) als $(v/c)^2$ die Gestalt:

ausdrücken die gesamte Wechselwirkungsenergie aller Partikeln einschließlich der relativistischen Ergänzungen an.

Wenn wir uns im folgenden, ohne auf wesentliche Gesichtspunkte bezüglich der uns interessierenden Fragen verzichten zu müssen, aus Gründen der übersichtlichen Darstellung auf das Zweikör-

² Diese letzte Bedingung bedeutet offenbar eine sehr scharfe Festlegung auf einen bestimmten Typus von Kraftwirkungen. Wie mir Hr. F. Bopp nach Abschluß dieser Arbeit mitteilte, konnte er inzwischen aus seiner allgemeinen Feldtheorie (Ann. Physik **38**, 345 [1940]; **42**, 573 [1943]; Physik. Z. **1945**, zum Druck eingereicht) ableiten, daß die von uns angegebene Lagrange-Funktion im Spezialfall kugelsymmetrischer Kraftfelder aus einer vektoriellen Feldtheorie und nur aus einer solchen

folgt. Feldtheorien vom Typus des skalaren oder tensoriellen führen zu Lagrange-Funktionen, die von der unseren verschieden sind. Es ist aber zu bemerken, daß unsere Lagrange-Funktion insofern über diejenige hinausgeht, die sich aus der Bopp'schen linearen Feldtheorie ableiten läßt, als ihr Gültigkeitsbereich nicht auf kugelsymmetrische Kraftfelder beschränkt ist, sondern z. B. auch für beliebige Multipolwechselwirkungen gelten muß.

perproblem für Teilchen gleicher Massen beschränken, dann beträgt die gesamte potentielle Energie $E_p: (r_{12} = r)$

$$E_p = V(r) \left(1 - \frac{\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2}{2c^2} \right) + \frac{(\mathbf{v}_1 \mathbf{r})(\mathbf{v}_2 \text{grad } V) + (\mathbf{v}_2 \mathbf{r})(\mathbf{v}_1 \text{grad } V)}{4c^2}. \quad (2)$$

Im Falle des Coulomb-Feldes $V = e^2/r$ geht dieser Ausdruck über in:

$$E_p^C = \frac{e^2}{r} \left[1 - \frac{1}{2c^2} \left(\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 + \frac{(\mathbf{v}_1 \mathbf{r})(\mathbf{v}_2 \mathbf{r})}{r^2} \right) \right]. \quad (3)$$

Er besitzt genau die von Darwin¹ angegebene Form und damit ist jedenfalls die eine der beiden oben aufgestellten Bedingungen erfüllt, die besagt, daß unsere Lagrange-Funktion im Falle des elektrischen Feldes die bekannte Darwinsche Gestalt annehmen soll.

§ 3. Der Massendefekt als Folge der relativistischen Mehrkörpermechanik

Den Beweis dafür, daß die Lagrange-Funktion (1) in der Tat zum richtigen Massendefekt

$$L = m \dot{\mathbf{s}}^2 + \frac{m}{4} \dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{m}{4c^2} \left[(\dot{\mathbf{s}} \mathbf{r})^2 + \frac{\dot{\mathbf{s}}^2 \mathbf{r}^2}{2} + \frac{\dot{\mathbf{r}}^4}{16} \right] - \left[1 - \frac{1}{2c^2} \left(\dot{\mathbf{s}}^2 - \frac{\dot{\mathbf{r}}^2}{4} \right) \right] \cdot V - \frac{2(\dot{\mathbf{s}} \mathbf{r})(\dot{\mathbf{s}} \text{grad } V) - \frac{\dot{\mathbf{r}} \mathbf{r}}{2} (\dot{\mathbf{r}} \text{grad } V)}{4c^2} - 2U(\dot{\mathbf{s}}). \quad (5)$$

Zur Durchführung unseres Beweises benötigen wir noch die Gleichung für die klassische Bindungsenergie W des Zweiteilchensystems. Deren Wert beträgt, wie man unmittelbar sieht:

$$W = \frac{m}{4} \dot{\mathbf{r}}^2 + V. \quad (6)$$

Die Größe W ist dabei, klassisch gesehen, eine Konstante der Bewegung. Bei Berücksichtigung der relativistischen Effekte bleibt sie dies freilich nicht mehr. In einem Entwicklungsverfahren jedoch, das nach steigenden Potenzen von v/c fort-

führt, werden wir nunmehr erbringen. Zu diesem Zwecke führen wir Schwerpunktskoordinaten ein:

$$\mathbf{r}_1 = \dot{\mathbf{s}} + \frac{\mathbf{r}}{2}; \quad \mathbf{r}_2 = \dot{\mathbf{s}} - \frac{\mathbf{r}}{2}. \quad (4)$$

Mit diesen Gleichungen und ihren Zeitableitungen gehen wir in Gl. (1) (für $n = 2$) ein. Die neue Lagrange-Funktion enthält dann die Geschwindigkeit des Schwerpunkts $\dot{\mathbf{s}}$ bis zu den Gliedern vierter Ordnung. Wir wollen aber im folgenden alle Glieder mit $\dot{\mathbf{s}}^3$ und $\dot{\mathbf{s}}^4$ fortlassen, da diese gewissermaßen diejenigen relativistischen Effekte berücksichtigen, die von der Bewegung des Gesamtsystems der n Teilchen im Potentialfeld $U(r_i)$ herrühren. Es läuft dies im Prinzip darauf hinaus, daß wir zwar eine sehr starke Wechselwirkung der Teilchen untereinander annehmen wollen, daß aber andererseits die vom äußeren Feld auf das System ausgeübten Kräfte sehr klein seien. Der gesuchte Effekt muß ja auch schon dann vorhanden sein, wenn man ganz langsame Bewegungen des Gesamtgebildes untersucht, und auf diese wollen wir uns beschränken. Unter Berücksichtigung dieses Gesichtspunktes erhält man für die Lagrange-Funktion folgenden Ausdruck:

schreitet, kann man sie im ersten Schritt dieser Näherungsmethode als eine zeitliche Konstante ansehen. Für das folgende wird dies wesentlich sein.

Um jetzt zu Bewegungsgleichungen für das Gesamtsystem zu gelangen, bilden wir:

$$\mathbf{p}_s = \frac{d}{dt} \text{grad}_{\dot{\mathbf{s}}} L = \text{grad}_{\dot{\mathbf{s}}} L. \quad (7)$$

Dabei bedeuten $\text{grad}_{\dot{\mathbf{s}}}$ und $\text{grad}_{\dot{\mathbf{r}}}$ die Gradienten im Raume des $\dot{\mathbf{s}}$ bzw. $\dot{\mathbf{r}}$.

Durch Einsetzen von (5) in (7) erhält man:

$$\mathbf{p}_s = 2m \dot{\mathbf{s}} + \frac{m}{4c^2} [2(\dot{\mathbf{s}} \mathbf{r}) \dot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{r}}^2 \dot{\mathbf{s}}] + \frac{V}{c^2} \dot{\mathbf{s}} - \frac{1}{2c^2} [\mathbf{r}(\dot{\mathbf{s}} \text{grad } V) + (\dot{\mathbf{s}} \mathbf{r}) \text{grad } V].$$

Das ergibt für die Zeitableitung des Impulses:

$$\dot{\mathbf{p}}_s = \left(2m + \frac{W}{c^2} \right) \ddot{\mathbf{s}} + \frac{\dot{\mathbf{s}}}{c^2} \frac{d}{dt} W + \frac{1}{2c^2} \frac{d}{dt} \{ m(\dot{\mathbf{s}} \mathbf{r}) \dot{\mathbf{r}} - [\mathbf{r}(\dot{\mathbf{s}} \text{grad } V) + (\dot{\mathbf{s}} \mathbf{r}) \text{grad } V] \} = -2 \text{grad}_{\dot{\mathbf{s}}} U(\dot{\mathbf{s}}). \quad (8)$$

Betrachten wir zunächst den eckigen Klammerausdruck auf der rechten Seite von Gl. (8), so sehen wir, daß dieser sich umformen läßt in:

$$\frac{1}{2c^2} \frac{d}{dt} \{m(\dot{\mathbf{s}} \dot{\mathbf{r}}) - [\mathbf{r}(\dot{\mathbf{s}} \text{grad } V) + (\dot{\mathbf{s}} \mathbf{r}) \text{grad } V]\} = \frac{3m}{2c^2} \frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{s}} \dot{\mathbf{r}}). \quad (9)$$

Man erhält dieses Ergebnis, indem man die Zeitdifferentiation zunächst ausführt. Wenn man nun annimmt, daß $|\dot{\mathbf{s}}| \ll |\ddot{\mathbf{r}}|$ sei und weiter, daß in der hier betrachteten Näherung die aus (6) folgende Beziehung der Hamiltonschen Theorie benützt werden darf:

$$\frac{m}{2} \ddot{\mathbf{r}} = -\text{grad } V, \quad (10)$$

so erhält man einen Ausdruck, der sich wieder als vollständige Zeitableitung schreiben läßt und der die Form (9) annimmt.

Denken wir uns jetzt Gl. (9) in Gl. (8) eingesetzt, berücksichtigen wir weiter, daß W als eine Konstante angesehen werden darf und führen wir nunmehr eine zeitliche Mittelung über ein Intervall durch, in welchem sich der Schwerpunkt nur unmerklich weiterbewegt hat, in dem aber andererseits die einzelnen Teilchen des Systems schon viele Umläufe gegeneinander durchgeführt haben, dann nimmt Gl. (8) die einfache Gestalt an:

$$\left(2m + \frac{W}{c^2}\right) \ddot{\mathbf{s}} = -2 \text{grad}_{\mathbf{s}} U(\mathbf{s}). \quad (11)$$

Man erhält also die gewöhnliche Newtonsche Bewegungsgleichung für das Gesamtsystem im Kraftfelde U , nur ist die Masse $2m$ ersetzt durch die um den „Massendefekt“ W/c^2 reduzierte Masse M :

$$M = 2m + \frac{W}{c^2}. \quad (12)$$

Damit ist in der Tat gezeigt, daß unsere Lagrange-Funktion (1) auch die zweite, oben aufgestellte Bedingung erfüllt, derzufolge sich ganz von selbst aus den Bewegungsgleichungen ergeben soll, daß Systeme mit innerer Wechselwirkung, wie z. B. Atomkerne, um das relativistische Massenäquivalent ihrer Bindungsenergie leichter sind, als die Gesamtmasse ihrer Teilchen ausmacht.

Es ist aber hier zu bemerken, daß sich die von

uns gewünschte Form der Bewegungsgleichung nur ergibt, wenn man die Mittelung über viele Umläufe im Relativsystem wirklich durchführen darf. Wenn sich der Schwerpunkt selbst mit relativistischer Geschwindigkeit bewegt oder er zumindest sehr großen Beschleunigungen von der Größenordnung der Relativbeschleunigungen ausgesetzt ist, laufen die Bewegungsvorgänge anders ab, als man nach (11) erwarten würde. Man muß dann wirklich auf die vollständige Gl. (8) zurückgehen, die in diesem Falle die bessere Auskunft gibt. Bei schwachen Kräften im Schwerpunktsystem äußern sich die Wirkungen der Zusatzglieder von (8) in einer sehr kleinen Zitterbewegung des Schwerpunkts, die direkten Beobachtungen wohl nur sehr schwer zugänglich ist. Zumindest aber sind bis heute keine Experimente bekannt, denen man Andeutungen über die Zitterbewegung des Schwerpunkts entnehmen kann.

§ 4. Die Hamilton-Funktion des Zweiteilchensystems in angenähert relativistischer Behandlung

Die Hamilton-Funktion des relativistischen Mehrkörperproblems H erhalten wir aus Gl. (1), indem wir nach der bekannten Vorschrift verfahren:

$$H = \sum_k p_k q_k - L \quad (13)$$

mit

$$p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}. \quad (14)$$

Wenn wir dabei gleich von der auf Schwerpunkts- und Relativkoordinaten transformierten Lagrange-Funktion (5) ausgehen und mit \mathbf{p}_s bzw. \mathbf{p}_r die zu den obigen Koordinaten kanonisch konjugierten Impulse bezeichnen, dann ergibt sich nach einigen Umrechnungen:

$$H = \frac{\mathbf{p}_s^2}{4m} + \frac{\mathbf{p}_r^2}{m} - \frac{1}{8m^2c^2} [2(\mathbf{p}_s \mathbf{p}_r)^2 + \mathbf{p}_s^2 \mathbf{p}_r^2 + 2\mathbf{p}_r^4] + \left[1 - \frac{1}{2m^2c^2} \left(\frac{\mathbf{p}_s^2}{4} - \mathbf{p}_r^2\right)\right] \cdot V + 2U(\mathbf{s}) \\ + \frac{1}{2m^2c^2} \left[\frac{\mathbf{p}_s \mathbf{r}}{4} (\mathbf{p}_s \text{grad } V) - (\mathbf{p}_r \mathbf{r}) (\mathbf{p}_r \text{grad } V)\right]. \quad (15)$$

Dabei sind die Impulse bis auf Glieder der Größenordnung $(v/c)^2$ bestimmt durch die Gleichungen:

$$\mathbf{p}_s = 2m \dot{\mathbf{s}} + \dots; \quad \mathbf{p}_r = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}} + \dots \quad (16)$$

Für die Diskussion der Hamilton-Funktion H ist es zweckmäßig, diese noch umzuschreiben. Sie läßt sich durch geeignete Zusammenfassung bestimmter Glieder auf die Form bringen:

$$H = H_s + H_r + h. \quad (17)$$

Hierbei sind die Abkürzungen eingeführt:

$$H_s = \frac{p_s^2}{2 \left(2m + \frac{W}{c^2} \right)} + 2 U(\mathbf{s}). \quad (18)$$

$$H_r = \frac{p_r^2}{m} - \frac{p_r^4}{4m^3c^2} + \left(1 + \frac{p_r^2}{2m^3c^2} \right) V - \frac{(\mathbf{p}_r \mathbf{r})(\mathbf{p}_r \text{grad } V)}{2m^2c^2} \quad (19)$$

und

$$h = \frac{1}{4m^2c^2} \left(-\frac{(\mathbf{p}_s \mathbf{p}_r)^2}{m} + \frac{(\mathbf{p}_s \mathbf{r})(\mathbf{p}_s \text{grad } V)}{2} \right). \quad (20)$$

Diese drei Anteile der Hamilton-Funktion haben jeder für sich schon eine bestimmte physikalische Bedeutung. So hängt die Größe H_s nur noch von den Schwerpunktskoordinaten \mathbf{s} und dem Schwerpunktsimpuls \mathbf{p}_s ab. Sie stellt die Hamilton-Funktion des Zweiteilchensystems als Ganzem dar und bringt als solche auch wieder zum Ausdruck, daß die Gesamtmasse, die für die Bewegung des Schwerpunkts maßgebend ist, gegenüber der Masse der beiden Teilchen $2m$ um den Massendefekt verringert ist.

Die Hamilton-Funktion H_r hingegen ist eine Funktion des gegenseitigen Abstandes der Partikeln und des zugehörigen Impulses. Sie beschreibt die inneren Bewegungsvorgänge unseres Zweiteilchensystems bis zu quadratischen Gliedern der Ordnung $(v/c)^2$ und erlaubt darum die Bindungsenergie eines solchen Systems um einen Schritt genauer zu berechnen als dies bisher möglich war. Wirklich neu sind allerdings nur die beiden letzten Summanden auf der rechten Seite von Gl. (19). Diese berücksichtigen die typischen Feldeffekte, während das Glied $p_r^4/(4m^3c^2)$ die schon bekannte Korrektur darstellt, die von der relativistischen Massenänderung bewegter Teilchen herrührt.

Die Hamilton-Funktion (19) wird in der weiteren zu besprechenden quantentheoretischen Umdeutung als Wellengleichung von Wichtigkeit sein, wenn es sich darum handelt, die Energie eines stationären Zustandes für ein Zweiteilchensystem im Hinblick auf die Relativitätseffekte um einen Schritt genauer zu berechnen, als dies mit der klassischen Schrödinger-Gleichung möglich ist.

Schließlich ist noch festzustellen, daß der dritte Anteil von H , nämlich die Funktion h (Gl. 20), bei einer zeitlichen Mittelbildung verschwindet, die genau derjenigen entspricht, wie sie beim Übergang von Formel (8) zu Formel (9) vollzogen und besprochen wurde. Es muß also wieder über einen Zeitraum gemittelt werden, der einerseits groß ist gegen die Umlaufzeiten der Teilchen im Relativsystem, andererseits aber klein gegen die entsprechende des Schwerpunktsystems im äußeren Kraftfeld U .

Zum Beweise dafür, daß unter dieser Voraussetzung der Ausdruck (20) für h verschwindet, multiplizieren wir zunächst die Bewegungsgleichung (10) skalar mit dem „sehr langsam“ veränderlichen Vektor \mathbf{p}_s und die so entstehende Gleichung außerdem noch mit dem Skalarprodukt $(\mathbf{p}_s \mathbf{r})$. Man erhält dann:

$$\frac{m}{2} (\mathbf{p}_s \mathbf{r})(\mathbf{p}_s \ddot{\mathbf{r}}) = -(\mathbf{p}_s \mathbf{r})(\mathbf{p}_s \text{grad } V). \quad (21)$$

Diese Gleichung läßt sich umschreiben in:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{m}{2} (\mathbf{p}_s \mathbf{r})(\mathbf{p}_s \dot{\mathbf{r}}) \right) - \frac{m}{2} (\mathbf{p}_s \dot{\mathbf{r}})^2 = -(\mathbf{p}_s \mathbf{r})(\mathbf{p}_s \text{grad } V). \quad (22)$$

Bei zeitlicher Mittelbildung dieser Beziehung in der oben angegebenen Weise verschwindet der erste Ausdruck auf der linken Seite von Gl. (22). Es gilt also:

$$\frac{m}{2} \overline{(\mathbf{p}_s \dot{\mathbf{r}})^2} = \overline{(\mathbf{p}_s \mathbf{r})(\mathbf{p}_s \text{grad } V)}. \quad (23)$$

Berücksichtigt man nun noch die Beziehung (16) für den Zusammenhang zwischen der Zeitableitung des Ortsvektors \mathbf{r} und dem Impuls \mathbf{p}_r , dann kann man (23) auch auf die Form bringen:

$$-\frac{\overline{(\mathbf{p}_s \mathbf{p}_r)^2}}{m} + \frac{\overline{(\mathbf{p}_s \mathbf{r})(\mathbf{p}_s \text{grad } V)}}{2} = 0. \quad (24)$$

Dieser Ausdruck stellt aber bis auf den nur unwesentlichen Faktor $1/(4m^2c^2)$ gerade die Größe h dar und damit ist gezeigt, daß h eben verschwindet.

§ 5. Die angenähert relativistische Wellengleichung des Zweiteilchensystems

Für die Aufstellung der Wellengleichung des Zweiteilchensystems ist es zweckmäßig, die Hamilton-Funktion in solcher Form aufzuschreiben, daß sie von den Koordinaten der Teilchen einzeln abhängt. Diese Form der Hamilton-Funktion ergibt sich, wenn man wieder von der La-

grange-Funktion (1) ausgeht und auf diese das Transformationsschema (13) bzw. (14) anwendet, ohne erst auf Schwerpunktskoordinaten zu transformieren. Wenn wir dabei zu unserer bisherigen Hamilton-Funktion H noch die Ruhenergien der beiden Teilchen hinzufügen und außerdem bedenken, daß die beiden ersten Summanden in (1) aus einer Entwicklung des bekannten Wurzelausdrucks für das kinetische Potential nach steigenden Potenzen von v/c entstammen, dann erhält man den Ausdruck:

$$H = c \sqrt{\mathbf{p}_1^2 + m^2 c^2} + c \sqrt{\mathbf{p}_2^2 + m^2 c^2} + \left(1 - \frac{\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2}{2 c^2}\right) V + \frac{(\mathbf{v}_1 \mathbf{r})(\mathbf{v}_2 \text{grad } V) + (\mathbf{v}_2 \mathbf{r})(\mathbf{v}_1 \text{grad } V)}{4 c^2}. \quad (25)$$

Den Übergang zur Wellengleichung vollziehen wir nunmehr, indem wir die beiden Wurzeln in der von Dirac angegebenen Weise ausziehen und außerdem die Geschwindigkeiten \mathbf{v}_1 und \mathbf{v}_2 umdeuten nach der Vorschrift:

$$\frac{\mathbf{v}_1}{c} \rightarrow \vec{\alpha}_1; \quad \frac{\mathbf{v}_2}{c} \rightarrow \vec{\alpha}_2. \quad (26)$$

Es folgt dann als *angenähert relativistische Wellengleichung für das Zweiteilchensystem*:

$$\left\{ \frac{\hbar c}{i} [(\vec{\alpha}_1 \text{grad}_1) + (\vec{\alpha}_2 \text{grad}_2)] + (\beta_1 + \beta_2) m c^2 + \left[\left(1 - \frac{\vec{\alpha}_1 \vec{\alpha}_2}{2}\right) \cdot V + \frac{(\vec{\alpha}_1 \mathbf{r})(\vec{\alpha}_2 \text{grad } V) + (\vec{\alpha}_2 \mathbf{r})(\vec{\alpha}_1 \text{grad } V)}{4} \right] - E \right\} \psi_{\mu\nu} = 0. \quad (27)$$

Dabei bedeuten $\vec{\alpha}_i$ und β_i die bekannten Dirac'schen vierzeiligen Matrizen. $\psi_{\mu\nu}$ ist eine Wellenfunktion mit 16 Komponenten. Die Indices μ und ν können jeweils die Werte 1 bis 4 annehmen und dabei sollen die Operatoren $\vec{\alpha}_1$ bzw. β_1 nur auf den Index μ , $\vec{\alpha}_2$ bzw. β_2 hingegen auf ν wirken.

Die Gleichung (27) geht für den Fall des Coulomb-Potentials genau in die von Breit¹ angegebene über. Sie stellt also die Verallgemeinerung dieser Wellengleichung für den Fall beliebiger Ortsabhängigkeit des Wechselwirkungspotentials dar.